

1. Números reales

Análisis de Variable Real

2014–2015

Índice

1. Sistemas numéricos	2
1.1. Números naturales. Principio de Inducción	2
1.2. Números enteros	4
1.3. Números racionales	6
2. Los números reales	6
2.1. Operaciones algebraicas	6
2.2. Desigualdades fundamentales en $\mathbb{R}$	8
2.3. Valor absoluto de un número real. Desigualdades básicas	10
2.4. Conjuntos acotados en $\mathbb{R}$. El Axioma del Supremo	11
2.5. Propiedad Arquimediana de $\mathbb{R}$. Consecuencias	13
2.6. Números irracionales	14
2.7. Números algebraicos y trascendentes	15
2.8. Intervalos en $\mathbb{R}$	15

1. Sistemas numéricos

1.1. Números naturales. Principio de Inducción

¿Qué son los números naturales?

Los números $1, 2, 3, \dots$, reciben el nombre de *números naturales*. Con ellos se realizan dos operaciones: la *suma* de números naturales y el *producto* de números naturales, que dan como resultado otro número natural perfectamente definido. Para dos números naturales cualesquiera m y n , su suma suele representarse por $m + n$ y su producto por $m \cdot n$ o mn (si no hay lugar a confusión). Si denotamos con $\mathbb{N}$ el conjunto de todos los números naturales, podemos pensar en la suma y el producto como aplicaciones del producto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} & \cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (m, n) &\longmapsto m + n, & (m, n) &\longmapsto m \cdot n. \end{aligned}$$

Propiedades algebraicas de los naturales

- Propiedad *asociativa* de la suma: $(m + n) + p = m + (n + p)$.
- Propiedad *conmutativa* de la suma: $m + n = n + m$.
- Propiedad *asociativa* del producto: $(mn)p = m(np)$.
- Propiedad *conmutativa* del producto: $mn = nm$.
- Elemento *neutro* (o *unidad*) del producto: Hay un número natural, que denotamos por 1 , tal que $n \cdot 1 = n$, cualquiera que sea n .
- Propiedad *distributiva* del producto respecto de la suma: $m(n + p) = mn + mp$.

Orden de los naturales

Se puede asimismo comparar el tamaño de dos números naturales cualesquiera y establecer de esta manera una relación de orden en $\mathbb{N}$. Suele escribirse $m \leq n$ para indicar que m es *menor o igual* que n (o, lo que es lo mismo, que n es *mayor o igual* que m , lo que también se escribe $n \geq m$).

Orden estricto

Definición 1.1. m es estrictamente menor (o simplemente menor) que n si $m \leq n$ y $m \neq n$. Lo denotamos $m < n$.

- Esto es lo mismo que decir que $n > m$, que se lee “ n es estrictamente mayor (o simplemente mayor) que m .”

Propiedades del orden

- Propiedad reflexiva: $m \leq m$.
- Propiedad antisimétrica: Si $m \leq n$ y $n \leq m$, entonces $m = n$.
- Propiedad transitiva: Si $m \leq n$ y $n \leq p$, entonces $m \leq p$.
- Propiedad de orden total: Siempre es $m \leq n$ o $n \leq m$.

Buena ordenación

Teorema 1.2 (Principio de Buena Ordenación). *Todo conjunto no vacío de números naturales posee un elemento mínimo, es decir, dado $S \subset \mathbb{N}$ no vacío, existe un elemento n_0 en S tal que $n_0 \leq n$ para todo $n \in S$.*

Principio de Inducción Matemática

Teorema 1.3 (Principio de Inducción Matemática). *Dado $S \subset \mathbb{N}$ tal que*

(I) $1 \in S$,

(II) $n + 1 \in S$, siempre que $n \in S$,

entonces $S = \mathbb{N}$.

Enunciado práctico del P. de Inducción Matemática

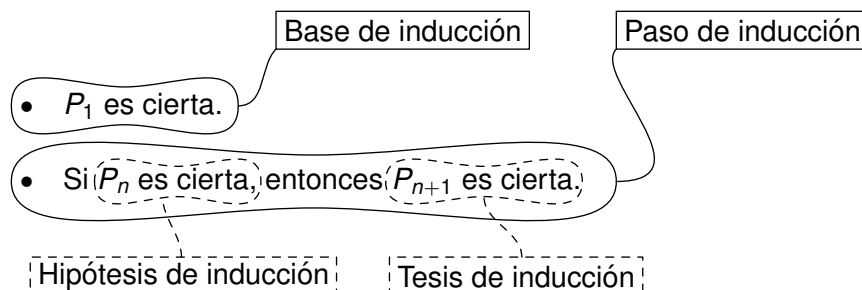
Teorema 1.4 (Principio de Inducción Matemática). *Dada una propiedad P_n tal que*

(I) P_1 es cierta,

(II) P_{n+1} es cierta, siempre que P_n es cierta,

entonces P_n es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

Partes de una demostración por inducción



Principio de Inducción Completa

Teorema 1.5 (Principio de Inducción Completa). *Dada una propiedad P_n tal que*

- (I) P_1 es cierta,
- (II) P_{n+1} es cierta, siempre que $P_1, P_2, \dots, P_n$ son ciertas,

entonces P_n es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

Axiomas de Peano

Axiomas 1.6 (Peano).

- (I) *Para todo número natural n existe otro número natural n^+ , que se llama siguiente o sucesor de n .*
- (II) *Existe un número natural, que denotamos por 1, tal que $n^+ \neq 1$ cualquiera que sea el número natural n .*
- (III) *Cualesquiera que sean los números naturales m y n , es $m^+ = n^+$ si y solo si $m = n$.*
- (IV) *Si un conjunto S de números naturales contiene a 1 y siempre que $n \in S$ también es $n^+ \in S$, entonces $S = \mathbb{N}$.*

1.2. Números enteros

¿Qué son los números enteros?

El conjunto de los *números enteros*, $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$, que amplía el de los naturales, se denota por $\mathbb{Z}$. En él hay definidas dos operaciones, suma y producto, y una relación de orden.

Propiedades algebraicas de los enteros

Las propiedades de la suma y producto de los números naturales también las cumplen los números enteros. Cumplen además algunas propiedades adicionales:

- Elemento neutro (o *nulo*) de la suma: Hay un número entero, que denotamos por 0, tal que $n + 0 = n$ para cualquier entero n .
- Elemento *opuesto* para la suma: para cada entero n hay otro entero, que denotamos por $-n$, tal que $n + (-n) = 0$.

Propiedades del orden de los enteros

En cuanto al orden, además de las propiedades que cumplía el orden de los naturales, podemos añadir:

- Compatibilidad del *orden* con la *suma*: Si $m \leq n$, entonces $m + p \leq n + p$.
- Compatibilidad del *orden* con el *producto*: Si $m \leq n$ y $p \geq 0$, entonces $mp \leq np$.

Buena ordenación (*parcial*) para los enteros

Los números enteros no están bien ordenados, pero tienen una propiedad que a efectos prácticos es casi lo mismo.

Definición 1.7. Un conjunto $S \subset \mathbb{Z}$ no vacío se dice que está *acotado inferiormente* (resp. *superiormente*), si existe un entero $k \in \mathbb{Z}$ tal que, para todo $n \in S$, es $k \leq n$ (resp. $k \geq n$).

Teorema 1.8 (Buena ordenación parcial de los enteros). *Todo conjunto no vacío $S \subset \mathbb{Z}$ acotado inferiormente (resp. superiormente) tiene un elemento mínimo (resp. máximo), es decir, existe un elemento $n_0 \in S$ tal que $n_0 \leq n$ (resp. $n_0 \geq n$) para todo $n \in S$.*

Un principio de inducción

Teorema 1.9. Sea $k \in \mathbb{Z}$. Si un conjunto $S \subset \mathbb{Z}$ cumple las dos condiciones siguientes:

(I) $k \in S$, y

(II) si $n \in S$ y $n \geq k$, entonces $n + 1 \in S$,

entonces S contiene a todos los enteros a partir de k , es decir,

$$S \supset \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq k\}.$$

Enunciado práctico

Teorema 1.10. Sea $k \in \mathbb{Z}$. Si una propiedad P_n es tal que

(I) P_k es cierta, y

(II) si P_n es cierta y $n \geq k$, entonces P_{n+1} es cierta,

entonces P_n es cierta para todo entero $n \geq k$.

1.3. Números racionales

¿Qué son los números racionales?

En $\mathbb{Z}$ es posible la resta, pero no la división. Esta operación es posible (dividiendo por elementos distintos de 0) en el conjunto $\mathbb{Q}$ de los *números racionales*, que son cocientes de números enteros (con denominador no nulo). En este conjunto están definidas la suma y el producto, y una relación de orden.

Propiedades algebraicas de los racionales

Las propiedades de la suma, el producto y el orden de los números enteros también las cumplen los números racionales. Cumplen además una propiedad adicional:

- Elemento *inverso* para el producto: Si $a \neq 0$, hay un número racional que denotamos por a^{-1} o $\frac{1}{a}$, tal que $aa^{-1} = 1$.

2. Los números reales

2.1. Operaciones algebraicas

El conjunto de los reales

Pasamos a considerar a continuación el conjunto $\mathbb{R}$ de los *números reales* o, más exactamente, las propiedades de $\mathbb{R}$ (sin entrar en su naturaleza: no decimos qué es un número real, sino cómo se manejan los números reales, fijando sus propiedades básicas como axiomas).

Propiedades algebraicas de los reales

Axiomas 1.11 (de la suma).

(I) *Propiedad asociativa de la suma:* $(a + b) + c = a + (b + c)$.

(II) *Propiedad conmutativa de la suma:* $a + b = b + a$.

- (III) *Elemento neutro (o nulo) de la suma: hay un número real, denotado por 0, tal que $a + 0 = a$, cualquiera que sea a .*
- (IV) *Elemento opuesto para la suma: para cada real a , hay un número real, que denotamos por $-a$, tal que $a + (-a) = 0$.*

Axiomas 1.12 (del producto).

- (V) *Propiedad asociativa del producto: $(ab)c = a(bc)$.*
- (VI) *Propiedad conmutativa del producto: $ab = ba$.*
- (VII) *Elemento neutro (o identidad) para el producto: hay un número real distinto de 0, que denotamos por 1, tal que $a \cdot 1 = a$, cualquiera que sea a .*
- (VIII) *Elemento inverso para el producto: si $a \neq 0$, hay un número real, que denotamos por a^{-1} o $\frac{1}{a}$, tal que $aa^{-1} = 1$.*

Axioma 1.13 (Relación de suma y producto).

- (IX) *Propiedad distributiva del producto con respecto a la suma: $a(b + c) = ab + ac$.*

Consecuencias de las propiedades básicas

Proposición 1.14.

- (I) *Si $a + c = b + c$, entonces $a = b$. (Ley de Cancelación).*
- (II) *Si $a + b = a$, entonces $b = 0$. En consecuencia, en el conjunto de los reales hay un único elemento nulo.*
- (III) *Si $a + b = 0$, entonces $b = -a$. En consecuencia, cada número real tiene un único opuesto.*

Proposición 1.15.

- (I) *Si $ac = bc$, y $c \neq 0$, entonces $a = b$. (Ley de Cancelación)*
- (II) *Si $ab = a$ y $a \neq 0$, entonces $b = 1$. Por tanto, en el conjunto de los reales hay un único elemento identidad.*
- (III) *Si $a \neq 0$ y $ab = 1$, entonces $b = \frac{1}{a}$. En consecuencia, cada número real no nulo tiene un único inverso.*

Proposición 1.16.

- (I) $a \cdot 0 = 0$. (Se dice que 0 es un elemento absorbente).
- (II) Si $ab = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$.
- (III) $-a = (-1)a$.
- (IV) $(-1)(-a) = a$. Por tanto, $-(-a) = a$. (Ley de Idempotencia).
- (V) $(-a)(-b) = ab$.
- (VI) Si $a \neq 0$, entonces $1/a \neq 0$ y $1/(1/a) = a$. (Ley de Idempotencia)

Abreviaturas

- $a - b := a + (-b)$, $\frac{a}{b} := a \cdot \frac{1}{b}$,
- $a + b + c := (a + b) + c = a + (b + c)$, $abc := (ab)c = a(bc)$,
- $a^2 := aa$, $a^3 := aaa$, ...
- $2a := a + a$, $3a := a + a + a$, ...

2.2. Desigualdades fundamentales en $\mathbb{R}$

Propiedades básicas del orden

Axiomas 1.17.

- (X) Propiedad reflexiva: $a \leq a$.
- (XI) Propiedad antisimétrica: Si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a = b$.
- (XII) Propiedad transitiva: Si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces $a \leq c$.
- (XIII) Propiedad de orden total: Siempre es $a \leq b$ o $b \leq a$.
- (XIV) Compatibilidad con la suma: Si $a \leq b$ entonces $a + c \leq b + c$.
- (XV) Compatibilidad con el producto: Si $c \geq 0$ y $a \leq b$ entonces $ac \leq bc$.
(En particular, si $c \geq 0$, $b \geq 0$ entonces $bc \geq 0$.)

Desigualdad estricta

Definición 1.18. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Decimos que $a < b$ (o que $b > a$) si $a \leq b$ y $a \neq b$.

Se prueba fácilmente la siguiente propiedad:

Teorema 1.19 (Ley de Tricotomía). Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Se da uno y solo uno de los siguientes casos:

- (I) $a < b$,
- (II) $a = b$,
- (III) $a > b$.

Consecuencias de las desigualdades básicas

Proposición 1.20.

- (I) Si $a \leq b$, $b < c$ entonces $a < c$.
- (II) Si $a < b$, $b \leq c$ entonces $a < c$.
- (III) Si $a < b$ entonces $a + c < b + c$.
- (IV) Si $a \leq b$, $c \leq d$, entonces $a + c \leq b + d$, siendo entonces $a + c = b + d$ si y solo si $a = b$ y $c = d$.
- (V) $a > 0$ si y solo si $-a < 0$.

Proposición 1.21.

- (I) Si $a > 0$, $b > 0$, entonces $ab > 0$.
- (II) Si $a > 0$, $b < 0$, entonces $ab < 0$.
- (III) Si $a < 0$, $b < 0$, entonces $ab > 0$.
- (IV) Cualquiera que sea a , es $a^2 \geq 0$. Se tiene $a^2 = 0$ si y solo si $a = 0$.
- (V) $1 > 0$ y $-1 < 0$.
- (VI) Siempre es $2ab \leq a^2 + b^2$.

Proposición 1.22.

- (I) Si $a < b$, $c > 0$, entonces $ac < bc$.

(II) Si $a < b$, $c < 0$, entonces $ac > bc$.

(III) Si $a \leq b$, $c \leq 0$, entonces $ac \geq bc$.

Proposición 1.23.

(I) Si $0 \leq a \leq b$, entonces $a^2 \leq b^2$.

(II) Si $0 \leq a < b$, entonces $a^2 < b^2$.

Proposición 1.24.

(I) Si $a > 0$ entonces $\frac{1}{a} > 0$. Si $a < 0$ entonces $\frac{1}{a} < 0$.

(II) Si $0 < a < b$ entonces $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

(III) Si $a < b < 0$ entonces $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

2.3. Valor absoluto de un número real. Desigualdades básicas

Valor absoluto y distancia

Definición 1.25. El *valor absoluto* de un número real a es el número real no negativo

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0, \\ -a, & \text{si } a \leq 0. \end{cases}$$

Definición 1.26. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, se llama *distancia* entre a y b al número real no negativo $|a - b|$.

Propiedades del valor absoluto

Proposición 1.27.

(I) $|a| \geq 0$.

(II) $|a| = 0$ si y solo si $a = 0$.

(III) $|-a| = |a|$.

(IV) $|a| \leq b$ si y solo si $-b \leq a \leq b$.

(V) $|a| > b$ si y solo si $a > b$ o $a < -b$.

(VI) $-|a| \leq a \leq |a|$.

Proposición 1.28.

$$(I) \quad |ab| = |a||b|.$$

$$(II) \quad \left| \frac{1}{a} \right| = \frac{1}{|a|}.$$

$$(III) \quad a^2 \leq b^2 \text{ si y solo si } |a| \leq |b|.$$

$$(IV) \quad a^2 = b^2 \text{ si y solo si } |a| = |b|.$$

Desigualdad triangular

Teorema 1.29 (Desigualdad Triangular). *Si a y b son números reales cualesquiera,*

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Ejemplos. A veces la desigualdad anterior es una igualdad, y otras veces es una desigualdad estricta.

$$\blacksquare \quad |3 + 5| = 8 = |3| + |5|.$$

$$\blacksquare \quad |-3 + 5| = 2 < 8 = |-3| + |5|.$$

Teorema 1.30 (Desigualdad Triangular Inversa). *Si a y b son números reales cualesquiera,*

$$||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

2.4. Conjuntos acotados en $\mathbb{R}$. El Axioma del Supremo**Cotas superiores e inferiores. Conjuntos acotados**

Definición 1.31. Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}$.

- (I) Si a es un número real y $a \leq s$ para todo $s \in S$, decimos que a es una *cota inferior* de S y que S está *acotado inferiormente* (por a).
- (II) Si b es otro número real y $b \geq s$ para todo $s \in S$, decimos que b es una *cota superior* de S y que S está *acotado superiormente* (por b).
- (III) Si un conjunto está acotado superiormente e inferiormente, decimos que está *acotado*.

Máximo y mínimo

Definición 1.32. Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}$.

- (I) Un número real m se dice que es un *mínimo* de S si pertenece a él y es una cota inferior de este, es decir, si $m \in S$ y $m \leq s$ para todo $s \in S$. Se escribe entonces $m = \min S$.
- (II) Un número real M se dice que es un *máximo* de S si pertenece a él y es una cota superior de este, es decir, si $M \in S$ y $M \geq s$ para todo $s \in S$. Se escribe entonces $M = \max S$.

Los máximos y mínimos son únicos

Proposición 1.33. Si un conjunto de números reales tiene máximo, entonces este máximo es único.

Proposición 1.34. Si un conjunto de números reales tiene mínimo, entonces este mínimo es único.

Ínfimo y supremo

En los ejemplos vistos anteriormente, nos aparecían algunos puntos especiales, parecidos a máximos y mínimos, pero que sin embargo se ajustaban a la definición de estos últimos. Introducimos ahora un concepto que sí sirve para ellos.

Definición 1.35. Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}$.

- (I) Un número real a se dice que es el *ínfimo* de S si es la mayor cota inferior de S . En este caso se escribe $a = \inf S$.
- (II) Un número real b se dice que es el *supremo* de S si es la menor cota superior de S . En este caso se escribe $a = \sup S$.

Los ínfimos y supremos son únicos

Proposición 1.36. Si un conjunto de números reales tiene supremo, entonces este supremo es único.

Proposición 1.37. Si un conjunto de números reales tiene ínfimo, entonces este ínfimo es único.

Máximo y supremo

Proposición 1.38. *Sea S un conjunto de números reales. Entonces, $b \in \mathbb{R}$ es el máximo de S si, y solo si, es su supremo y además $b \in S$.*

Proposición 1.39. *Sea S un conjunto de números reales. Entonces, $a \in \mathbb{R}$ es el mínimo de S si y solo si es su ínfimo y además $a \in S$.*

Caracterización “ ε ” de supremos e ínfimos

Proposición 1.40 (Caracterización “ ε ” del supremo). *Sea S un conjunto de números reales. Entonces $b \in \mathbb{R}$ es el supremo de S si, y solo si, verifican las dos siguientes condiciones:*

(I) *b es cota superior de S .*

(II) *Para todo $\varepsilon > 0$, existe un $s \in S$ tal que $s > b - \varepsilon$.*

Proposición 1.41 (Caracterización “ ε ” del ínfimo). *Sea S un conjunto de números reales. Entonces $a \in \mathbb{R}$ es el ínfimo de S si, y solo si, verifican las dos siguientes condiciones:*

(I) *a es cota inferior de S .*

(II) *Para todo $\varepsilon > 0$, existe un $s \in S$ tal que $s < a + \varepsilon$.*

El supremo no funciona bien en los racionales

La Propiedad del Supremo de los reales

Esta es de hecho la propiedad clave que diferencia a los reales de los racionales. Se cumple en el primero de estos conjuntos, y no se cumple en el otro, como acabamos de ver. De momento, fijaremos esta propiedad como el último de nuestros axiomas para los reales.

Axioma 1.42 (Propiedad del Supremo, o de Completitud).

(XVI) *Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado superiormente tiene supremo.*

Proposición 1.43. *Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado inferiormente tiene ínfimo.*

2.5. Propiedad Arquimediana de $\mathbb{R}$. Consecuencias

La Propiedad Arquimediana

Teorema 1.44 (Propiedad Arquimediana). *Dados dos números reales a y b con $a > 0$, existe algún número natural n tal que $na > b$.*

Otros enunciados de la Propiedad Arquimедiana

Teorema 1.45. *Dados un número real b , existe algún número natural n tal que $n > b$.*

Teorema 1.46. *Los números naturales no constituyen un conjunto acotado (en $\mathbb{R}$).*

Teorema 1.47. *Dado $\varepsilon > 0$, existe un número natural n tal que $1/n < \varepsilon$.*

Parte entera de un número real

Teorema 1.48. *Dado $x \in \mathbb{R}$, existe un número entero m (y uno solo), tal que*

$$m \leq x < m + 1.$$

Definición 1.49. Al número m del teorema anterior se le llama *parte entera* de x , y se denota con $[x]$.

Los racionales son densos

Teorema 1.50 (Densidad de los Racionales). *Dados dos números reales a y b , con $a < b$, existe algún número racional r tal que $a < r < b$.*

2.6. Números irracionales

Los números irracionales

Definición 1.51. Los números reales que no son racionales se llaman *números irracionales*.

Teorema 1.52. *Sea p un número real no negativo y $n \in \mathbb{N}$. Existe al menos un número real v tal que $v^n = p$.*

Corolario 1.53. *Existen números irracionales.*

Los irracionales son densos

Teorema 1.54 (Densidad de los Irracionales). *Dados dos números reales a y b , con $a < b$, existe algún número irracional x tal que $a < x < b$.*

2.7. Números algebraicos y trascendentes

Concepto de número algebraico

Definición 1.55. Se dice que un número real es *algebraico* si es un cero de un polinomio con coeficientes enteros. El conjunto de los números algebraicos se denota por $\mathbb{A}$.

Proposición 1.56. *Todo número racional es algebraico.*

Operaciones con números algebraicos

Teorema 1.57. *Sean α y β dos números algebraicos. Entonces*

- (I) $\alpha + \beta$ es algebraico.
- (II) $\alpha\beta$ es algebraico.
- (III) $-\alpha$ es algebraico.
- (IV) Si $\alpha \neq 0$ entonces $1/\alpha$ es algebraico. En consecuencia, β/α es algebraico.
- (V) Si $\alpha > 0$ y $p \in \mathbb{N}$, entonces $\sqrt[p]{\alpha}$ es algebraico.

Los números algebraicos son numerables

Teorema 1.58 (de Cantor). *El conjunto $\mathbb{A}$ de los números algebraicos es numerable.*

Números trascendentes

Definición 1.59. Se dice que un número real es *trascendente* si no es algebraico.

2.8. Intervalos en $\mathbb{R}$

Intervalos

Definición 1.60. Reciben el nombre de *intervalos* los subconjuntos de $\mathbb{R}$ definidos del siguiente modo (a y b son número reales cualesquiera):

- (I) intervalo *acotado y abierto*: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$;
- (II) intervalo *acotado, cerrado por la izquierda y abierto por la derecha*:
 $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$;

- (III) intervalo *acotado, abierto por la izquierda y cerrado por la derecha*:
 $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\};$
- (IV) intervalo *acotado y cerrado*: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\};$
- (V) intervalo *abierto, acotado inferiormente pero no superiormente*:
 $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\};$
- (VI) intervalo *cerrado, acotado inferiormente pero no superiormente*:
 $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\};$
- (VII) intervalo *abierto, acotado superiormente pero no inferiormente*:
 $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\};$
- (VIII) intervalo *cerrado, acotado superiormente pero no inferiormente*:
 $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\};$
- (IX) intervalo *no acotado ni inferior ni superiormente*: $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}.$

Caracterización de los intervalos

Proposición 1.61 (Propiedad de los Valores Intermedios). *Un subconjunto I de $\mathbb{R}$ es un intervalo si, y solo si, dados $x, y \in I$, cada $z \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq z \leq y$ también pertenece a I .*

El Teorema de los Intervalos Encajados

Teorema 1.62 (de los Intervalos Encajados, de Cantor). *Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $I_n = [a_n, b_n]$ un intervalo cerrado y acotado (no vacío). Supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $I_{n+1} \subset I_n$. Entonces, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ es no vacío. Si, además, el tamaño de los intervalos se puede hacer tan pequeño como se quiera, es decir, $\inf\{(b_n - a_n) \mid n \in \mathbb{N}\} = 0$, entonces $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ consta exactamente de un punto.*